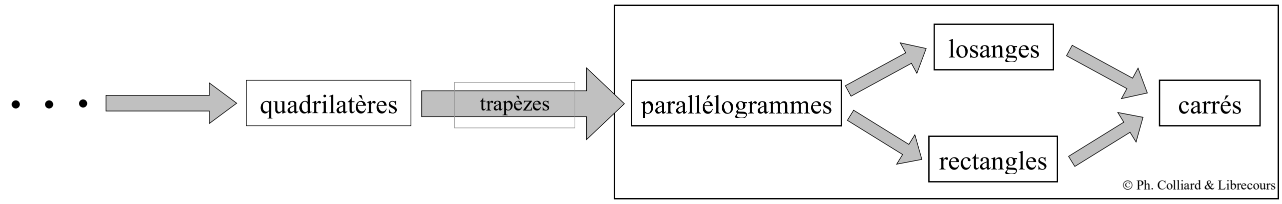
Philippe Colliard
http://www.donc-dapres.com

Parallélogrammes

(lignes parallèles, en grec !)

Dans la **famille des parallélogrammes**, je voudrais :
un grand-parent   un parent   le petit dernier



Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

3 remarques :

en bon français, " **les** " veut dire " **tous les** " (Et pas seulement quelques-uns)

Dans cette définition, " côtés parallèles" signifie : côtés dont les "droites-supports" sont parallèles

si je voulais respecter la hiérarchie, je devrais définir les parallélogrammes à partir des trapèzes (leurs parents immédiats) et non à partir des quadrilatères (leurs grands-parents)
Mais l'étude des trapèzes n'est pas à ton programme…

→ Quadrilatères dont **des** côtés opposés sont parallèles

Tout, tout, tout sur les parallélogrammes, en quelques feuilles (Enfin, tout ce qui peut t'aider en cinquième !)

Géométrie plane : hiérarchie

chaque nouvelle figure est conçue à partir d'une figure déjà connue, à laquelle on impose une propriété supplémentaire: c'est une relation de type parent-enfant (J'ai construit une hiérarchie: il en existe d'autres … Mais pas à propos des parallélogrammes)

Connaître la hiérarchie des parallélogrammes **est fondamental** :

-) pour les définir: une définition part – en principe – du parent immédiat

-) pour les "démasquer": tu penses que la figure que tu observes est un carré, et tu as peut-être raison …
Mais si tu veux m'en convaincre, tu vas devoir me prouver que c'est un parallélogramme, puis que ce parallélogramme est un losange (ou un rectangle, au choix), puis que ce losange (ou ce rectangle) est un carré: tu suis la hiérarchie !

Parallélogrammes : définitions et propriétés

une définition doit te permettre d'identifier une nouvelle figure avec le minimum d'informations: il te suffit en général de partir d'une figure-parente, et de lui imposer une condition supplémentaire.

une propriété, c'est tout ce qui est partagé par toutes les figures de la catégorie que tu observes (et pas seulement pour la figure que tu viens de dessiner). **Les enfants héritent de toutes les propriétés de leurs parents :** si un parent a une propriété, tous ses enfants l'ont ! (Donc un losange a ses propriétés propres, plus celles de tous les parallélogrammes)

Parallélogrammes : propriétés caractéristiques

une propriété "ordinaire" peut être partagée par plusieurs catégories très différentes : 2 côtés consécutifs d'un losange ont la même longueur, mais c'est également vrai pour les triangles équilatéraux…

Une propriété caractéristique n'est vraie que pour une catégorie de figures (*), qu'elle … Caractérise donc !
(*) (et ses enfants, bien sûr !)

Ce sont ces propriétés très particulières que tu vas utiliser pour démontrer que tu as telle ou telle catégorie de figure, **en avançant pas à pas dans la hiérarchie**.

Si … alors …

2 feuilles pour te démontrer une propriété des parallélogrammes et sa propriété réciproque :
ces démonstrations – à la limite du programme ! – te montrent l'importance des propriétés des symétries centrales !!!
(En fait, tu pourrais démontrer toutes les propriétés des feuilles précédentes en utilisant les symétries centrales)

Dernière minute

dans les propriétés des losanges, rectangles et carrés, observe le chassé-croisé des diagonales et des côtés consécutifs.
A ton avis, dans la hiérarchie des parallélogrammes, qu'indiquent les flèches montantes et les flèches descendantes ?

Les parallélogrammes :

leur famille

leurs définitions habituelles

leurs propriétés les plus courantes

quadrilatère

polygone
à 4 côtés

parallélogramme

quadrilatère
dont les côtés opposés sont parallèles

Si un quadrilatère
est un **parallélogramme**,
alors

- ses côtés opposés sont parallèles
- ses côtés opposés ont la même longueur
- ses diagonales ont le même milieu
- il a un centre de symétrie
- ses angles opposés ont la même mesure
- ses angles consécutifs sont supplémentaires

losange

parallélogramme
dont 2 côtés consécutifs ont la même longueur

Si un parallélogramme
est (un) **losange**,
alors

- ses côtés (consécutifs) ont la même longueur
- ses diagonales sont perpendiculaires

rectangle

parallélogramme
dont 2 côtés consécutifs sont perpendiculaires

Si un parallélogramme
est (un) **rectangle**,
alors

- ses côtés consécutifs sont perpendiculaires
- ses diagonales ont la même longueur

carré

losange
dont 2 côtés consécutifs sont perpendiculaires

rectangle
dont 2 côtés consécutifs ont la même longueur

Si un losange
est (un) **carré**,
alors

- ses côtés consécutifs sont perpendiculaires
- ses diagonales ont la même longueur

Si un rectangle
est (un) **carré**,
alors

- ses côtés (consécutifs) ont la même longueur
- ses diagonales sont perpendiculaires

Démontre que …

Quelle(s) propriété(s) caractéristique(s) comptes-tu utiliser ?

Si **les** côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme

Si **les** côtés opposés d'un quadrilatère **non croisé** ont la même longueur **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme

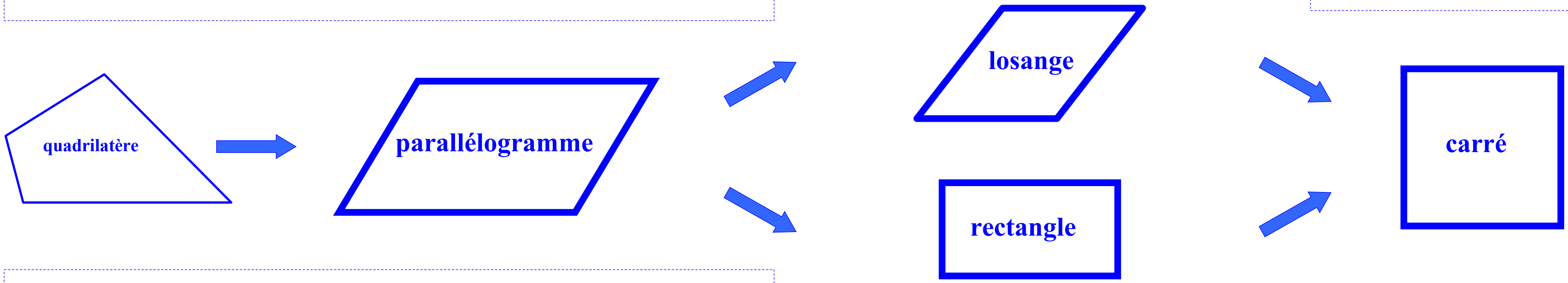
Si **deux** côtés opposés d'un quadrilatère **non croisé** ont la même longueur et des supports parallèles **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme

Si un quadrilatère **non croisé** a un centre de symétrie **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme

Si **les** angles opposés d'un quadrilatère **non croisé** ont la même mesure **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme

Si **les** angles consécutifs d'un quadrilatère sont supplémentaires **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme



Si **deux** côtés consécutifs d'un parallélogramme ont la même longueur **alors** ce parallélogramme est un losange

Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires **alors** ce parallélogramme est un losange

Si **deux** côtés consécutifs d'un parallélogramme sont perpendiculaires **alors** ce parallélogramme est un rectangle

Si les diagonales d'un parallélogramme ont la même longueur **alors** ce parallélogramme est un rectangle

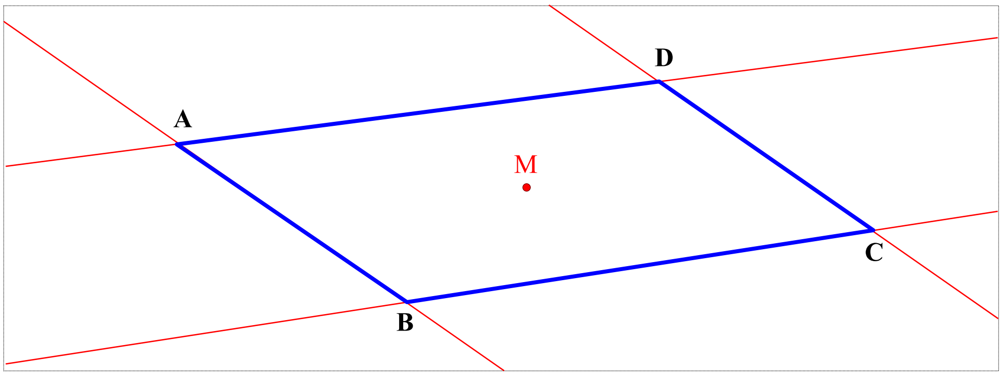
Si **deux** côtés consécutifs d'un losange sont perpendiculaires **alors** ce losange est un carré

Si les diagonales d'un losange ont la même longueur **alors** ce losange est un carré

Si **deux** côtés consécutifs d'un rectangle ont la même longueur **alors** ce rectangle est un carré

Si les diagonales d'un rectangle sont perpendiculaires **alors** ce rectangle est un carré

Si un quadrilatère non croisé à un centre de symétrie
alors ce quadrilatère est un parallélogramme



POURQUOI ?

J'appelle M le centre de symétrie du quadrilatère ABCD , et j'observe la symétrie de centre M .

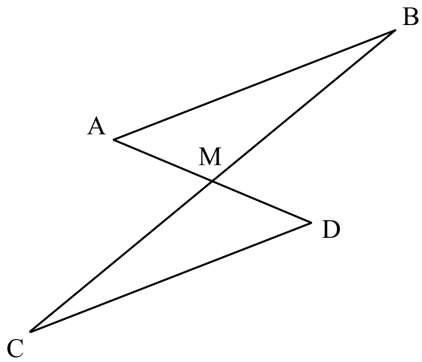
Dans cette symétrie :

2 sommets consécutifs ne peuvent pas être images :

suppose, par exemple que A et D soient images
M serait donc le milieu de [AD]

Mais B et C devraient également être images
(puisque M est centre de symétrie de ABCD, les sommets de ce polygone " s'échangent " dans la symétrie de centre M)
M serait donc également le milieu de [BC]

… Et ABCD serait alors un quadrilatère croisé !



donc :

ce sont les sommets opposés qui sont images l'un de l'autre :

A et C sont images

B et D sont images

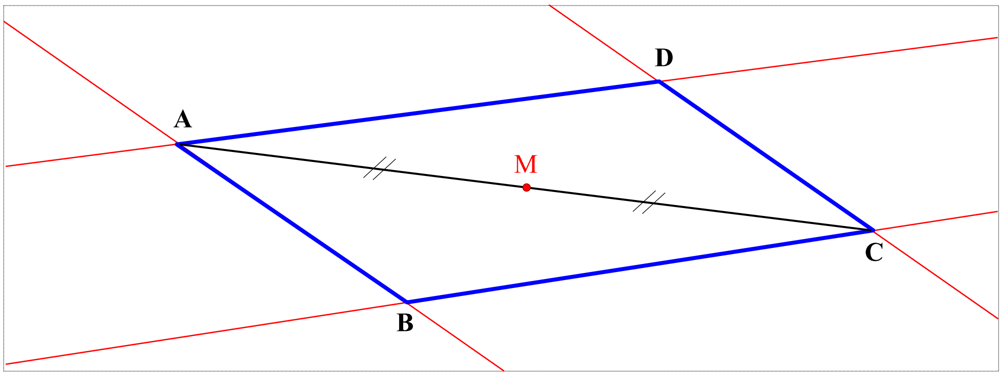
alors : (AB) et (CD) sont images — l'image de (AB) est une droite qui passe par les images de A et de B

(AD) et (CB) sont images — l'image de (AD) est une droite qui passe par les images de A et de D

Et finalement : (AB) // (CD)
(AD) // (CB)
dans une symétrie centrale, une droite et son image sont parallèles

les côtés opposés de ABCD sont parallèles, donc **ABCD est bien un parallélogramme**

<u>Si</u> un quadrilatère est un parallèlogramme <u>alors</u> ce quadrilatère à un centre de symétrie



POURQUOI ? *

* Ca te rappelle une feuille sur 2 angles alternes-internes formés par 2 parallèles et une sécante ?
… Comme c'est bizarre !

J'appelle M le milieu de [AC] , et j'observe la symétrie de centre M .

Dans cette symétrie :

A et C sont images … Par définition de la symétrie centrale.

(AD) et (CB) sont images … Là, ça se complique un peu :

je fais comme si je n'avais aucune idée de ce qu'est l'image de (AD) ,

et je vais la découvrir par raisonnement … C'est juste en-dessous :

l'image de (AD) est une droite … D'après P1
Cette image, je l'appelle t .

t passe par C … Car (AD) passe par A et C est l'image de A
(si (AD) contient A , son image contient l'image de A)

t // (AD) … Ca, c'est P2

la seule droite parallèle à (AD) et qui passe par B est (CB) … Tu as reconnu P3 ?

donc : t = (CB) et fin du raisonnement.

(AB) et (CD) sont images c'est exactement la même façon de raisonner… Je ne recommence pas !

B est l'image de D

(… Donc, bien sur, D est également l'image de B)

D est à la fois un point de (AD) et de (CD) ,
donc son image est à la fois un point de (CB) (qui est l'image de (AD))
et de (AB) (qui est l'image de (CD))
… Et le seul point commun à (CB) et (AB) est B !!!

Conclusion : dans la symétrie de centre M , l'image de ABCD est CDAB , c'est à dire lui-même.

M est bien centre de symétrie de ABCD

P1 : dans une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite
P2 : dans une symétrie centrale, une droite et son image sont parallèles
P3 : il existe exactement 1 droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée **

** Riemann , Lobatchevski ? En cinquième ? Et pourquoi pas Einstein ???